Министерство образования Пензенской области
Муниципальное бюджетное образовательное учреждение
СОШ № 18 г. Пензы

Некоторые способы и приемы решения задач экономического содержания (на кредиты)

Работа ученицы 10 А класса
МБОУ СОШ № 18 г. Пензы
Айсиной Алины
Руководитель – учитель математики
Жистина Лилия Фаритовна

г. Пенза, 2020

Оглавление

Введение

Одним из важнейших потребностей современной школы является воспитание человека, компетентного в сфере социально-трудовой деятельности, а также в бытовой сфере. Развитое экономическое мышление выпускника школы – требование современности, необходимо быть готовым к жизни в условиях рыночных отношений.

Эффективному постижению основ экономики поможет решение задач, в содержании которых идет речь о процентах. Сами проценты не дают экономического развития, но их знание помогает в развитии практических способностей, а также умение решать экономические задачи. Обдуманное изучение процентов может способствовать развитию таких навыков как экономичность, расчетливость.

С 2015 года в экзаменационную работу ЕГЭ по математике добавлена текстовая задача экономического профиля. Многие школьники не в состоянии воспринимать и понимать речевые обороты взрослых, испытывают затруднения при решении задач экономического характера.

Мы считаем, что подобранные рекомендации в данном направлении и проработка экономических задач на уроках математике будет способствовать повышению качества выполнения экономических задач выпускниками.

Актуальность данной темы обусловлена тем, что в курсе математики, изучаемой в школе, не упоминается напрямую тема о решении задач с экономическим содержанием. В связи с преобразованием России из системы централизованного планирования в экономику рыночной ориентации экономические знания стали необходимыми как в профессиональной сфере, так и в повседневной жизни. Элементарные экономические знания позволят понять роль и права человека в обществе, готовят учеников к адекватному восприятию общества и производства, помогают им определить для себя сферу деятельности, профессию в будущем.

Цель: изучение и выработка рекомендаций по решению задач на кредиты и увеличение доли выпускников МБОУ СОШ №18 г. Пензы, получивших максимальный балл за экономические задачи ЕГЭ.

Задачи:

1. Изучить теоретический материал и провести классификацию экономических задач, входящих в контрольно-измерительные материалы единого государственного экзамена по математике профильного уровня.
2. Выявить достоинства и недостатки различных приемов решения экономических задач.
3. Составить методические рекомендации учащимися по приемлемому способу решения экономических задач ЕГЭ для получения максимальных баллов.

Методы исследования:

1) анкетирование старшеклассников по вопросу решения задач с экономическим содержанием;

2) подборка и классификация задач и их решения;

3) показ использования актуальных приемов решения экономических задач.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Изучение и распространения опыта решения задач по финансовой математике для учащихся 10-11 классов, проявляющих интерес к разработке, анализу и применению математических алгоритмов в экономике. Развитие у учащихся умений строить математические модели экономических ситуаций, исследовать эти модели, получать и интерпретировать выводы.

Объектами исследования являются способы и приемы решения задач с экономическим содержанием, входящие в контрольно-измерительные материалы единого государственного экзамена по математике профильного уровня (Задание 17)

Глава 1. Основные способы погашения кредита

Прежде чем приступать к решению «экономической задачи» на кредитование, необходимо узнать, какие есть способы погашения кредита.

Выбирая кредитную программу, потенциальные заемщики ориентируются на процентную ставку по кредиту. Однако на сумму выплачиваемых процентов влияет не только ставка, но и метод погашения кредита. Таких методов существует два: дифференцированные платежи и аннуитетные платежи.

Современная банковская система предлагает два основных способа погашения кредита: дифференцированный и аннуитетный.

При оформлении кредитного договора обе стороны, и заемщик, и кредитор, хотят извлечь из предстоящего сотрудничества как можно больше выгоды. И, как правило, понятия о выгоде у разных сторон диаметрально противоположные.

Для того, чтобы сделать кредитный договор более выгодным для одной из его сторон, изменяя затраты заемщика в сторону увеличения или уменьшения стоимости кредита, можно использовать ряд специальных инструментов. Основным из которых является тип платежа. Оформляя кредитный договор с различными типами платежей по кредиту, заложив изначально одинаковые условия, в процессе выплат мы увидим, что суммы переплат будут значительно различаться.

Аннуитетная схема

Она наиболее распространена и практически навязывается банком своим клиентам. Суть ее заключается в том, что все платежи, в том числе тело кредита, процентные начисления за его использование и комиссия банка, насчитываются на весь период выплат. При этом сумма долга рассчитывается таким образом, что на каждый месяц приходится одинаковая сумма.

При такой схеме важным критерием является стабильность в размере выплат.

Дифференциальная схема

Предусматривает начисление процентной ставки на остаток суммы. В большинстве случаев такой способ выплаты является наиболее оптимальным, поскольку с каждым очередным платежом сумма уменьшается, и уже к половине срока она будет не столь ощутима.

Но такая схема не совсем удобна в тех случаях, когда сумма кредита слишком велика и в первые месяцы нет возможности выплачивать средства в больших количествах. Но зато такая схема удобна в тех случаях, когда предвидится поступление крупной суммы денег, например, от продажи имущества.

Отличие дифференцированного платежа от аннуитетного

Способы погашения кредита

Способ погашения	Преимущества	Недостатки
Дифференцированный	1. Уменьшение суммы основного долга с начала выплат 2. Меньшая сумма переплат	1. Максимальная нагрузка на заемщика в начале выплат 2. Учет больших сумм первых выплат, влияющих на максимальную сумму кредита 3. Неудобство в планировании бюджета 4. Неравномерное распределние долговой гарузки
Аннуитетный	1. Удобство для планирования бюджета 2. Более низкая сумма погашения на первом этапе 3. Равномерное распределение долговой нагрузки	1. Более высокая сумма перплат 2. Выплата основного долга с середины договора

Таким образом, решающую роль при получении кредита играют процентная ставка, комиссия банка и схема погашения кредита.

Конечно, есть и менее значительные моменты, касающиеся сроков погашения, скрытых комиссий и первоначального взноса, который снимается с основной суммы кредита. Но если внимательно изучить условия кредитования в разных банках, то вполне можно стать обладателем недорогого кредита.

Дифференцированные платежи дают линейную зависимость от погашения кредита: чем меньше должен — тем меньше начислили процентов. Сумма и срок досрочного погашения ничем не ограничены. Досрочное погашение в аннуитетной схеме лишь сокращает срок выплаты кредита: на графике «срезаются» последние платежи и отпадает необходимость платить соответствующие им проценты, которые в конце графика как раз очень малы. Таким образом, в аннуитетной схеме досрочное погашение невыгодно.

Задачи на кредитование

17 задание профильного уровня ЕГЭ по математике представляет собой задачу, связанную с финансами, а именно эта задача может быть на проценты, часть долгов и др. Сложность заключается в том, что необходимо рассчитать проценты или часть на длительном промежутке, поэтому данная задача не является прямой аналогией стандартных задач на проценты.

Изучение статистических сборников показывает, что разница между предполагаемым процентом решаемости задачи с экономическим содержанием и фактической решаемостью свыше 32% (фактически решили задачу 7%, ожидаемое решение – 40%)

Мы провели анкетированиеучеников 10 и 11 класса, планирующих сдавать профильную математику. Результаты нашего опроса отражены в таблице

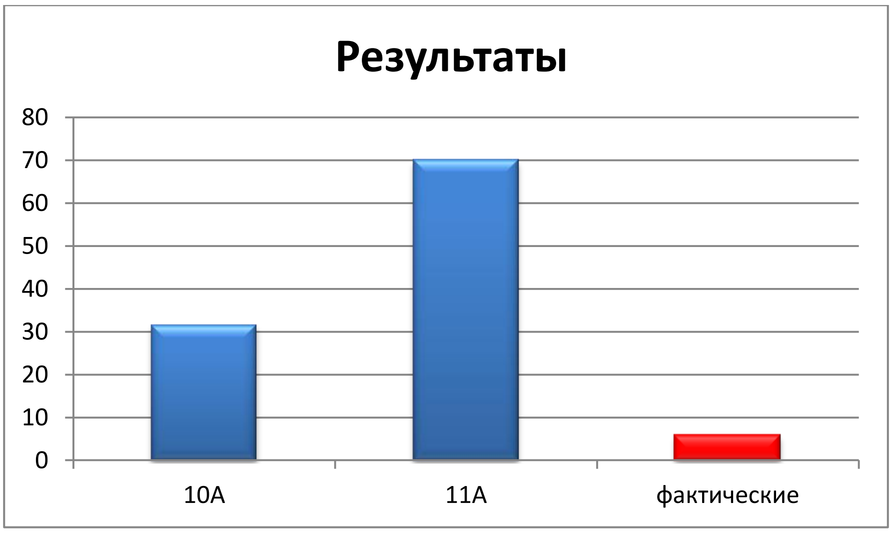
Класс	Кол-во учащихся, планирующих сдавать профильную математику	Кол-во учащихся, планирующих решать экономическую задачу	Кол-во учащихся, имеющих представление о методах решения экономической задачи	Кол-во учащихся, желающих научиться решать экономическую задачу
10	19 из 30	19	6 (31,6%)	13 + 6 «имеющих представление»
11	10 из 15	10	7 (70%)	3 (30%)

В 2018 году из 23 выпускников МБОУ СОШ № 18 г. Пензы, сдававших профильную математику, получили баллы за экономическую задачу 0% , в 2019 году из 17 выпускников лишь 5,9% справились с подобной задачей.

Решение задания номер 17

Год	Кол-во сдававших математику профильную	Набрали ненулевой балл (от сдавших экзамен учащихся)	Кол-во набранных баллов		
			3 (max)	2	1
2018	23	0%	0%	0%	-
2019	17	1 (5,9%)	0%	5,9%	0%

В нашей школе зазор между предполагаемым результатом и фактическим высок.



Теоремы об платежах

Вначале рассмотрим задачи, которые можно решить по общим формулам.

Для вывода формулы для аннуитетных платежей решим следующую задачу:

31 декабря 2014 года Сергей взял в банке некоторую сумму в кредит под r% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на r%), затем Сергей переводит в банк x рублей. Какую сумму взял Сергей в банке, если он выплатил долг n равными платежами (то есть за n лет)?

Решение:

S – сумма кредита

r% - годовые (ежемесячные) проценты

b=1+0,01r – коэффициент

x – ежегодная (ежемесячная) выплата

Год	Долг с %	Выплата	Долг после выплаты
0			S
1 год	Sb	x	Sb-x
2 год	(Sb-x)b=Sb^2-xb	x	Sb^2-xb-x
3 год	(Sb^2-xb-x)b=Sb^3-x b^2-xb	x	Sb^3-x b^2-xb-x
4 год	(Sb^3-x b^2-xb-x)b= Sb^4-xb^3-xb^2-xb	x	Sb^4-xb^3-xb^2-xb-x
5 год	(Sb^4-xb^3-xb^2-xb-x)b= Sb^5-$xb^{4-}$$xb^3$-$xb^2$-xb	x	Sb^5-$xb^{4-}$$xb^3$-$xb^2$-xb-x
6 год	(Sb^5-$xb^{4-}$$xb^3$-$xb^2$-xb-x)b= Sb^6-xb^5-xb^{4-}xb-^{3}xb^2-xb	x	Sb^6-xb^5-xb^{4-}xb-^{3}xb^2-xb-x
	…		
n год	Sb^n-xb^{n-1}-xb^{n-2}-…-xb^2-xb	x	Полная выплата, долг равен 0

Sb^n-xb^{n-1}-xb^{n-2}-…-xb^2-xb-x=0 $\Longrightarrow$ Sb^n=xb^{n-1}+xb^{n-2}+…+xb^2+xb+x

Sb^n=x(1+b+ b^2+b^{n-2}+b^{n-1}). В скобках находится геометрическая прогрессия

Сумма геометрической прогрессии находится по формуле $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$, тогда

$$S \cdot b^n = x \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1}$$

Теорема об аннуитетных платежах. *Сумму кредита, процентную ставку кредита и величину текущего долга связывают соотношения:*

$\boldsymbol{S \cdot b^n = x \cdot \frac{b^n-1}{b-1}}$, $\quad \boldsymbol{S_n = S \cdot b^n - x \cdot \frac{b^n-1}{b-1}}$

Пример 1. 31 декабря 2014 года Сергей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12%), затем Сергей переводит в банк 3512320 рублей. Какую сумму взял Сергей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение:
Ставка (r) - 12% , b=1,12
Ежегодная выплата (x) - 3512320 рублей
Количество лет (n) 3 года
Сумма кредита (S) -?

$$S \cdot b^n = x \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} \Rightarrow \quad S \cdot 1{,}12^3 = 3512320 \cdot \frac{1{,}12^3 - 1}{1{,}12 - 1} \Rightarrow \quad S = 843600$$

Ответ: 843600 рублей.

Пример 2. 1 января 2015 года бизнесмен взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем бизнесмен переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев бизнесмен может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. рублей?

Решение. Применим общие формулы. Заметим, что в нашей задаче после предпоследней выплаты величина S_{n-1} может быть не только равной ежемесячной выплате x, но и оказаться меньше нее: и в том, и в другом случае кредит будет погашен последним платежом.

Поэтому верно неравенство $b^{n-1} \geq \frac{2-b}{x-S(b-1)} \implies 1{,}02^{n-1} \geq \frac{2-1{,}02}{220-1100(1{,}02-1)} \approx 1{,}088$

Требуется найти наименьшее натуральное число n, удовлетворяющее неравенству, легко достигается перебором. Ответ: n=6.

Ответ: 6 месяцев.

Для вывода формулы для дифференцированных платежей решим следующую задачу:

Пример 3. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн. рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

• в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн. рублей, а наименьший—не менее 0,6 млн. рублей.

Решение:
Ставка (r), b=1+0,01r
Количество лет (n), n=9 лет
Сумма кредита (S), S=4,5 млн

Год	Основной долг	Проценты	Остаток
0			S
1 год	S/n	$S \cdot \frac{r}{100}$	$S - \frac{S}{n} = \frac{S(n-1)}{n}$
2 год	S/n	$\frac{S(n-1)}{n} \cdot \frac{r}{100}$	$S - \frac{S}{n} - \frac{S}{n} = \frac{S(n-2)}{n}$
3 год	S/n	$\frac{S(n-2)}{n} \cdot \frac{r}{100}$	$\frac{S(n-3)}{n}$

4 год	S/n	$\frac{S(n-3)}{n}\cdot\frac{r}{100}$	$\frac{S(n-4)}{n}$
…	…		
n год	S/n	$\frac{S}{n}\cdot\frac{r}{100}$	0
Всего	S	$\frac{S}{n}\cdot\frac{r}{100}\cdot(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1)$	

$$\frac{S}{n}\cdot\frac{r}{100}\cdot\underbrace{(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1)}_{\text{арифметическая прогрессия}}=\frac{S}{n}\cdot\frac{r}{100}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n=\underbrace{\frac{S\cdot r}{100}\cdot\frac{1+n}{2}}_{\text{переплата}}$$

Очевидно, что наибольший платеж – первый платеж, и он равен $\frac{S}{n}+S\cdot\frac{r}{100}$, а наименьший – последний, и он равен $\frac{S}{n}+\frac{S}{n}\cdot\frac{r}{100}$

Решим задачу 3 при помощи готовых теоретических выкладок. Тогда получим систему неравенств:

$$\begin{cases}4{,}5\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{r}{100}\right)\le 1{,}4\\ \frac{4{,}5}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{r}{100}\right)\ge 0{,}6\end{cases}\Rightarrow r=20$$

Ответ: 20%

Теорема об дифференцированных платежах. *Сумму кредита, процентную ставку кредита и величину текущего долга связывают соотношения:*

$$\boldsymbol{\textit{Переплата}=\frac{S\cdot r}{100}\cdot\frac{1+n}{2},\quad \textit{Выплаты}=S+\textit{Переплата}}$$

Наибольший платеж $=\frac{S}{n}+S\cdot\frac{r}{100}$, а наименьший $=\frac{S}{n}+\frac{S}{n}\cdot\frac{r}{100}$

Пример 4. 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что на пятый месяц кредитования нужно выплатить 57,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

Решение: Сумма кредита (S)

Ставка (r) -3 %, b=1,03 n=9 Сумма всех выплат =?

Месяц	Долг с %	Выплата	Долг после выплаты
0			S
1	Sb	$Sb-\frac{8S}{9}$	$\frac{8S}{9}$
2	$\frac{8Sb}{9}$	$\frac{8Sb}{9}-\frac{7S}{9}$	$\frac{7S}{9}$
3	$\frac{7Sb}{9}$	$\frac{7Sb}{9}-\frac{6S}{9}$	$\frac{6S}{9}$

4	$\frac{6Sb}{9}$	$\frac{6Sb}{9}-\frac{5S}{9}$	$\frac{5S}{9}$
5	$\frac{5Sb}{9}$	$\frac{5Sb}{9}-\frac{4S}{9}$	$\frac{4S}{9}$
6	$\frac{4Sb}{9}$	$\frac{4Sb}{9}-\frac{3S}{9}$	$\frac{3S}{9}$
7	$\frac{3Sb}{9}$	$\frac{3Sb}{9}-\frac{2S}{9}$	$\frac{2S}{9}$
8	$\frac{2Sb}{9}$	$\frac{2Sb}{9}-\frac{S}{9}$	$\frac{S}{9}$
9	$\frac{Sb}{9}$	$\frac{Sb}{9}$	0

$\frac{5Sb}{9}-\frac{4S}{9}$=57,5   5Sb-4S=517,5   S(5b-4)=517,5

S(5*1,03-4)=517,5

S=450

$Sb(1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\frac{6}{9}+\frac{5}{9}+\frac{4}{9}+\frac{3}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9})-S(\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\frac{6}{9}+\frac{5}{9}+\frac{4}{9}+\frac{3}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9})$=5Sb-4S=

450*(5*1,03-4)=450*1,15=517,5

Ответ:517,5 тысяч.

Задачи, не «попадающие» под теоремы

Пример 5. 15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение: S – сумма кредита

r% - годовые (ежемесячные) проценты (5%)

b=1+0,01r – коэффициент (1,05)

Месяц	Долг с %	Выплата	Долг после выплаты
15.01			S
15.02	Sb	Sb-0,9S	0,9S
15.03	0,9Sb	0,9Sb -0,8S	0,8S
15.04	0,8Sb	0,8Sb -0,7S	0,7S
15.05	0,7Sb	0,7Sb -0,6S	0,6S
15.06	0,6Sb	0,6Sb -0,5S	0,5S
15.07	0,5Sb	0,5Sb	0

Общая сумма выплат:

(Sb+0,9Sb+0,8Sb+0,7Sb+0,6Sb+0,5Sb)-(0,9S+0,8S+0,7S+0,6S+0,5S)=

4,5Sb-3,5S=S(4,5b-3,5)=S(4,5*1,05-3,5)=1,225S

Ответ: 22,5 процента.

Пример 6. В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 6,6 млн. руб. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года.

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.

— в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 6,6 млн. руб.

— суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если в 2021 году долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 12,6 млн. рублей.

Решение: $S=6,6$

$r\% = ?$ $b=1+0,01r$

Год	Долг с %	Выплата	Долг после выплаты
2016			S
2017	Sb	Sb-S	S
2018	Sb	Sb-S	S
2019	Sb	Sb-S	S
2020	Sb	x	Sb-x
2021	$(Sb-x)b= Sb^2-xb$	x	0

1)$Sb^2-xb=x$

2)$3Sb-3S+2x=12,6$

$19,8b-19,8+2x=12,6,$ $x=16,2-9.9b$

1)$6,6\,b^2 – (16,2-9,9b)b=16,2-9,9b$ $6,6\,b^2 -16,2b+9,9\,b^2 =16,2-9,9b$

$16,5\,b^2 -6,3b-16,2=0$ $165\,b^2 -63b-162=0$

$D=63^2+4•162•165=110889$

$b_1=1,2$ $b_2= -0,81$не подходит по условию задачи.

Ответ: r=20.

Пример 7. 1 марта 2010 года Аркадий взял в банке кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 марта каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Аркадий переводит в банк платеж. Весь долг Аркадий выплатил за 3 платежа, причем второй платеж оказался в два раза больше первого, а третий – в три раза больше первого. Сколько рублей взял в кредит Аркадий, если за три года он выплатил банку 2 395 800 рублей?

Решение:

Сумма кредита (S)-?

Ставка (a)=10%, b=1,1

Количество лет (n) 3 года

Год	Долг с %	Выплата	Долг после выплаты
2010			S
2011	Sb	x	Sb-x
2012	$(Sb-x)b=Sb^2-xb$	2x	$Sb^2-xb-2x$
2013	$(Sb^2-xb-2x)b=Sb^3-xb^2-2xb$	3x	Полная выплата - остаток 0

x+2x+3x=2395800

6x=2395800

x=399300

$Sb^3 - xb^2-2xb=3x$

$Sb^3-(3+2b+b^2)x=0$

$$S=\frac{(3+2b+b^2)x}{b^3}=\frac{399300\bullet(3+2{,}2+1{,}21)}{1{,}331}=\frac{399300\bullet6{,}41}{1{,}331}=1923000\,рублей$$

Ответ: 1923000рублей.

Достоинства и недостатки решения задач по формулам и способом «пошагового» расчета

Название метода	Достоинства метода	Недостатки метода
Решение методом «пошагового расчета»	Наглядность, возможность увидеть все варианты. «Теоретически» можно решить любую задачу	Очень протяженный во времени, связанный с трудоемкими расчетами. Возможность допустить более одной вычислительной ошибки велика
Решение с помощью готовых формул	Быстрое решение, «прозрачность» алгоритма	Формальное заучивание формул, без фактического понимания. Не все задачи решаются с помощью формул. Возможность забыть формулы

Заключение

Каждую задачу мы старались разобрать и решить несколькими способами. Были выработаны некоторые приемы решения задач:

1. Необходимо понимать эквивалентность утверждений «больше на 10%» и «больше в 1,1 раза»
2. Уметь переводить текст задачи на язык математики
3. Знать и понимать расчет простых и сложных процентных операций.
4. Задачи на вклады и кредиты решаются проще не по формулам, а с пошаговыми расчетами. Хотя решение может быть длиннее, но для понимания учащихся проще.

Принятие решения в большинстве случаев заключается в генерации возможных альтернатив решений, их оценке и выборе лучшей. Для подавляющего большинства человеческих решений нельзя точно рассчитать и оценить последствия. Можно лишь предполагать, что определенный вариант решения приведет к наилучшему результату.

Что же такое «наилучшее» решение? В исследованиях операций «наилучшим» будем считать решение, доставляющее оптимальные функции для достижения цели. Решения является лучшим лишь для конкретного лица принимающего решение, в отношении поставленных им целей, при заданных условиях. Эта субъективная оценка оказывается в настоящее время единственно возможной основой объединения разных подходов к решению задач, позволяющую оценивать варианты решений.

Список литературы

1. Финансовая грамотность: материалы для учащихся. 10-11 классы общеобразоват. Орг. /Ю.В. Брехова, А. П. Алмосов, Д. Ю. Завьялов. – М.:ВИТА-ПРЕСС,2015 – 400 с., ил. (Дополнительное образование: Серия «Учимся разумному финансовому поведению»);

2 . Финансовая грамотность: материалы для родителей. 10-11 классы общеобразоват. Орг. /Ю.В. Брехова, А. П. Алмосов, Д. Ю. Завьялов. – М.:ВИТА-ПРЕСС,2015 – 112 с., ил. (Дополнительное образование: Серия «Учимся разумному финансовому поведению»);

3.Липсиц И.В. Экономика. Базовый курс. 10-11 класс. М.: Вита–Пресс, 2013.

4.Федеральный закон от 02.12.1990 № 395-1 «О банках и банковской деятельности» Федеральный закон от 22.04.1996 № 39-ФЗ «О рынке ценных бумаг»

5. Федеральный закон от 23.12.2003 № 177-ФЗ «О страховании вкладчиков физических лиц в банках Российской Федерации»

Интернет ресурсы:

http://blogvestor.ru/o-dengax/investirovanie-v-nedvizhimost.html

http://cbr.ru/statistics/?PrtId=int_rat

http://gold.investfunds.ru/indicators/224/#beginf

http://www.gks.ru/dbscripts/cbsd/dbinet.cgi?pl=1905001

http://www.ssc.smr.ru/media/journals/izvestia/2010/2010_3_314_317.pdf

https://math-ege.sdamgia.ru/pdf/825873d70cc715ed70fb4c386761abb2.pdf

http://math100.ru/prof-ege17-1/

Приложение 1.

Задачи, решаемые по формулам для аннуитетных платежей

1. 1 января 2015 года Павел Витальевич взял в банке 1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Павел Витальевич переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Павел Витальевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 125 тыс. рублей?

2. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая—31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк *x* рублей. Какой должна быть сумма х, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (т.е. за два года)?

3. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплат кредита следующая—31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк х рублей. Какой должна быть сумма *x*, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

4. 31 декабря 2014 года Ярослав взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5%), затем рослав переводит в банк 2 132 325 рублей. Какую сумму взял Ярослав в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

5. 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

6. В июле планируется взять кредит на сумму 8 052 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

7. В июле планируется взять кредит на сумму 9 282 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

8. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10%по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 399300 рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (т. е. за три года)?

9. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнениюс концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 207360 рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (т.е. за четыре года)?

10. 31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 20%), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

11. 31 декабря 2014 года Савелий взял в банке 7 378 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5%), затем Савелий переводит в банк платёж. Весь долг Савелий выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

12. В июле планируется взять кредит на сумму 8 052 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей меньше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (т. е. за два года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

13. В июле планируется взять кредит на сумму 9 282 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей меньше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (т. е. за два года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

14. В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредит банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 156 060 рублей больше суммы взятого кредита.

15. В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредита банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 78 030 рублей больше суммы взятого кредита.

Приложение 2.

Задачи, решаемые по формулам для дифференцированных платежей

1. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший—не менее 0,6 млн рублей.

2. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший—не менее 0,5 млн рублей.

3. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат (в млн рублей) после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

4. 15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 20% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

6. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 47 млн рублей?

7. Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна вернет банку в течение первого года кредитования?

8. 15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 2,4 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно выплатить банку в первые 12 месяцев?

9. Пётр взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Пётр должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется $r\%$ этой суммы, и своим ежемесячным платежом Пётр погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц. Известно, что общая сумма, выплаченная Петром банку за весь срок кредитования, оказалась на 13% больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r.

10. Алексей взял кредит в банке на срок 17 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется $r\%$ этой суммы, и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц. Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 27% больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите *г*.

11. 15 января планируется взять кредит в банке на 48 месяцев. Условия его возврата:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

12. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Приложение 3.

Задачи, решаемые методом «пошагового» расчета

1. В июле 2017 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей (где S—натуральное число) сроком на 3 года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

2. В июле 2017 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2018, 2019 и 2020 гг. долг остаётся равным S тыс. рублей;
- выплаты в 2021 и 2022 годах равны по 625 тыс. рублей;
- к июлю 2022 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет. Ответ дайте в тыс. рублей.

3. В июле 2017 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2018, 2019 и 2020 гг. долг остаётся равным S тыс. рублей;
- выплаты в 2021 и 2022 годах равны по 360 тыс. рублей;
- к июлю 2022 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет. Ответ дайте в тыс. рублей.

4. Дмитрий взял кредит в банке на сумму 270 200 рублей. Схема выплата кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 процентов оставшуюся сумму долга, а затем Дмитрий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Дмитрий погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно втрое больше предыдущего. Какую сумму Дмитрий заплатил в первый раз? Ответ дайте в рублях.

5. Георгий взял кредит в банке на сумму 804 000 рублей. Схема выплата кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 процентов оставшуюся сумму долга, а затем Георгий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Георгий погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно вдвое меньше предыдущего. Какую сумму Георгий заплатил в третий раз? Ответ дайте в рублях.

6. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Известно, что кредит был полностью погашен за два года, причём в первый год было переведено 75 000 рублей, а во второй год—46 000 рублей. Найдите число r.

7. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Известно, что кредит был полностью погашен за два года, причём в первый год было переведено 68 000 рублей, а во второй год—59 000 рублей. Найдите число r.

8. Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 10% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита (в млн рублей), при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 8 млн.

9. Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита (в млн рублей), при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн.

Естественно, что эти приложения не определяют всего списка задач.